

花子さんと太郎君はある科学博物館で、「表示が変わる不思議なボール」の操作体験コーナーを見つけました。

この「表示が変わる不思議なボール」は、A、B、Cのどれかを表示できるようになっており、異なる表示のボールを接触させることにより、表示が次のようになります。

【表示の変化の仕方とその例】

- ①異なる表示の2つのボールを接触させると、それぞれの表示とは異なる表示になる。
＜例＞ⒶとⒷを接触させると、ⒸとⒸになる。
- ②同じ表示の2つのボールを接触させても、表示は変わらない。
＜例＞ⒶとⒶを接触させても、ⒶとⒶのまま変わらない。

太郎：操作体験コーナーで実際に確かめてみよう。

【1番目の操作体験コーナーの問題】

この操作体験コーナーでは、次のように表示された10個のボールを操作します。

ⒶⒷⒷⒷⒸⒸⒸⒸⒸⒸ

この10個のボールは、操作させる順番を工夫すると、すべてのボールの表示をAにそろえることができます。どの表示のボールをどのような順番で接触させればよいでしょうか。ただし、1回の操作で接触させるボールの個数は2個とします。

太郎：ぼくは、次のような操作手順を考えたよ。はじめの3回の操作で、表示がBと表示がCのボール3組をそれぞれ接触させる。4回目の操作で、表示がAと表示がCのボール1組を接触させる。5回目と6回目の操作で、表示がBと表示がCのボール2組をそれぞれ接触させれば、表示がAのボールが10個になる。全体の流れを示すと、A、B、Cが表示されるボールの個数の変化は表1のようになるよ。

表1	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目
表示がAのボール	1	3	5	7	6	8	10
表示がBのボール	3	2	1	0	2	1	0
表示がCのボール	6	5	4	3	2	1	0

花子：わたしの考えた操作手順、A、B、Cが表示されるボールの個数の変化は表2のようになるわよ。

表2	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目
表示がAのボール	1	0	2	4	6	8	10
表示がBのボール	3	5	4	3	2	1	0
表示がCのボール	6	5	4	3	2	1	0

〔問題1〕

花子さんが考えた操作手順を、太郎君の考えた操作手順の説明を参考にして説明しなさい。

〔2番目の操作体験コーナーの問題〕

この操作体験コーナーでは、次のように表示された12個のボールを操作します。

ⒶⒷⒷⒷⒷⒸⒸⒸⒸⒸⒸⒸⒸ

この12個のボールは、操作させる順番を工夫すると、すべてのボールの表示をA、B、Cのいずれかにそろえることができます。どのような順番で行うと、どの表示のボールにそろえることができるでしょうか。ただし、1回の操作で接触させるボールの個数は2個とします。

〔問題2〕

2番目の操作体験コーナーの12個のボールを、7回の操作で、表示がBのボールにそろえる操作手順を考え、表1にならって、A、B、Cが表示されるボールの個数の変化を示しなさい。

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
表示がAのボール	1							
表示がBのボール	4							
表示がCのボール	7							

2番目の操作体験コーナーの問題を考えたあとで、太郎君は次のような疑問を持ちました。

「1番目の操作体験コーナーの問題では、ボールの表示をすべてAにすることができたけれど、ボールの表示をBやCにそろえることはできないのだろうか。」

花子さんにもこの疑問を話し、2人でいろいろ試してみたけれども、なかなかうまくいきませんでした。そこで、操作体験コーナー担当の係員に質問をしてみることにしました。

太郎：1番目の操作体験コーナーにある問題のことなのですが、この問題では、10個すべてのボールの表示をBやCにそろえることはできないのですか。

係員：なかなかよいことに気づきましたね。確かに、1番目の操作体験コーナーにあるボールの組み合わせでは、10個のボールの表示をBやCにそろえることはできないのです。

花子：ボールの表示をそろえることができるか、できないかを判断するための規則はありますか。

係員：例えば、表示がAのボールにそろえようとするときは、最初のボールのうち、表示がA以外のボール、つまり、表示がBとCのボールの個数の差に注目してください。この差が3の倍数か0になっていれば、表示をそろえることができます。

太郎：その規則に当てはめれば、1番目の操作体験コーナーにあるボールでは、表示がBと表示がCのボールの個数の差が3個だから、表示がAにそろうというわけですね。

係員：そのとおりです。

花子：ということは、表示がBのボールにそろえたいときには、表示がAと表示がCのボールの個数の差を調べればよいのね。1番目の体験コーナーにあるボールの場合には、表示がAのボールの個数と表示がCのボールの個数の差が5個だから、表示がBのボールにそろえることができないわ。

【係員が示した問題】

次のように表示された10個のボールに、もう1個ボールを追加して操作することとします。

ⒶⒷⒷⒷⒸⒸⒸⒸⒸ

追加したボールの表示によっては、11個のボールの表示をすべてBかCのいずれかにそろえることができます。

どの表示のボールを追加すると、どの表示のボールにそろえることができるでしょうか。ただし、1回の操作で接触させるボールの個数は2個とします。

【問題3】

【係員が示した問題】について、11個のすべてのボールの表示をBかCのいずれかにそろえる操作手順を考えます。どの表示のボールを追加すると、どの表示のボールにそろえることができるか答えなさい。また、そのときのA、B、Cが表示されるボールの個数の変化を示しなさい。ただし、操作の回数は7回以下とします。

解答

〔問題1〕

表示の変化のしかたとその例より、異なる表示の2個の球を接触させると、その2個の表示とは異なる表示になることがわかります。また、太郎の操作手順より、1回に2個1組ずつ、並んでいる球の中から好きな2個を取り出して接触させてよいことがわかります。これより、表の前の列から数が減っている2つの球を接触させたことがわかりますので、花子が各回で操作した球は、下の表で、○で囲んだものになります。

表2	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目
表示がAのボール	1	0	2	4	6	8	10
表示がBのボール	3	5	4	3	2	1	0
表示がCのボール	6	5	4	3	2	1	0

〔問題2〕

球をBにするためには、AとCを1個ずつ接触させます。2番目の体験コーナーではAの球が不足しているので、AとCの球の数を同じにするために、Aを増やす必要があります。BとCを1個ずつ接触させるとA2個になり、最初の個数ではA1個、C7個ですから、2回BとCを接触させるとA5個、C5個に変わります。これを接触させればBに変わっていくので、合計7回の操作で全てBになります。解答例としては、下表のようになります。

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
A	1	3	5	4	3	2	1	0
B	4	3	2	4	6	8	10	12
C	7	6	5	4	3	2	1	0

別のパターン

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
A	1	0	2	1	0	2	1	0
B	4	6	5	7	9	8	10	12
C	7	6	5	4	3	2	1	0

別のパターン

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
A	1	3	2	4	3	2	1	0
B	4	3	5	4	6	8	10	12
C	7	6	5	4	3	2	1	0

など。

※途中、BとCが1個減りAが2個増えるのが2回と、AとCが減りBが2個増えるのが5回になればよい

[問題3]

そろえたい表示以外の2つの球の数の差が、0または3の倍数であればそろえられますから、BにそろえるためにはA（1個）とC（6個）より、Cを追加すればよいことになります。

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
A	1	3	5	4	3	2	1	0
B	3	2	1	3	5	7	9	11
C	7	6	5	4	3	2	1	0

※途中、BとCが1個減りAが2個増えるのが2回と、AとCが減りBが2個増えるのが5回になればよい

また、CにそろえるためにはA（1個）とB（3個）ですから、Bを追加すればよいことになります。

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
A	1	3	2	1	0			
B	4	3	2	1	0			
C	6	5	7	9	11			

※途中、BとCが1個減りAが2個増えるのが1回と、AとCが減りBが2個増えるのが3回になればよい

[問題1]

1回目の操作で、表示がAと表示がCのボール1組を接触させる。2回目から6回目まで、5回の操作で表示がBと表示がCのボール5組をそれぞれ接触させれば、表示がAのボールが10個になる。

[問題2]

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
表示がAのボール	1	3	5	4	3	2	1	0
表示がBのボール	4	3	2	4	6	8	10	12
表示がCのボール	7	6	5	4	3	2	1	0

[問題3]

追加するボール：C

表示のそろうボール：B

	最初	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目
表示がAのボール	1	3	5	4	3	2	1	0
表示がBのボール	3	2	1	3	5	7	9	11
表示がCのボール	7	6	5	4	3	2	1	0