

太郎君と花子さんと先生が、分数の歴史について話をしています。

先生：古代エジプトでは、すべての分数を $\frac{1}{2}$ や $\frac{1}{3}$ のような、分子が1の分数の和で表していたそうです。このような分子が1で分母が2以上の整数である分数のことを、「単位分数」とよびます。

太郎：すべての分数が単位分数の和で表せるのですか。

先生：はい、どんな分数でも可能です。ために、 $\frac{5}{12}$ という分数について考えてみましょう。

花子： $\frac{5}{12}$ は $\frac{1}{2}$ より小さいから、 $\frac{1}{2}$ を使って表すことはできません。 $\frac{1}{3}$ を使ってみると、 $\frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ になるので、 $\frac{5}{12}$ は $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ という組み合わせで表すことができました。

先生：素晴らしいですね。その考え方をフィボナッチの強欲算法といいます。それはさておき、単位分数の和に直す別の考え方を説明しましょう。今回は分母が12ですから、12の約数をすべて書き出してみてください。

太郎：12の約数は小さい順に1、2、3、4、6、12です。

先生：はい。次に、分子が5ですから、書き出した約数の中で、和が5になる組み合わせを作ります。

花子： $1 + 4 = 5$ です。

先生：分母12に、いまの1と4を分子として和を書けば、とうぜん $\frac{5}{12} = \frac{1}{12} + \frac{4}{12}$ ですが、これを約分してあげると、先ほどの花子さんの解答と同じになります。

太郎：すると、 $\frac{5}{12}$ を単位分数の和で表す方法がもう1つ見つかりますね。

花子：おもしろいですね。先生、もっと問題を出してください。

先生：ならば次は $\frac{5}{9}$ を単位分数の和で表してみてください。この分数は、単位分数2つの和では表せませんよ。

太郎：では、何個の単位分数になるのですか。

先生：そうですね、3個の単位分数と4個の単位分数で表してみましょう。ヒントとして、4個にするときは $\frac{1}{36}$ という単位分数を使うことを考えてください。

[問題1] $\frac{5}{12}$ を単位分数の和で表す方法がもう1つ見つかりと太郎君が言っていることについて、太郎君の見つけた方法を会話を参考に答えなさい。

[問題2] $\frac{5}{9}$ を分母が異なる単位分数の和で表します。下のA~Fに当てはまる整数を答えなさい。なお、 $A < B < C$ 、 $D < E < F < 36$ とします。

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{D} + \frac{1}{E} + \frac{1}{F} + \frac{1}{36}$$

[問題1] $\frac{5}{12} =$					
[問題2] A	B	C	D	E	F

解答

[問題1]

12の約数のうち和が5になる組み合わせには3と2もあります。

よって、 $\frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$ から、 $\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ という組み合わせを見つけたと考えられます。

[問題2]

9の約数は1、3、9なので、和を5にする組み合わせは作れません。

そこで、 $\frac{5}{9}$ の分母と分子に2をかけて分母18に通分し、 $\frac{10}{18}$ で考えてみます。

18の約数は1、2、3、6、9、18ですから、 $1+3+6=10$ が作れます。

したがって、 $\frac{10}{18} = \frac{6}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{18}$ より、 $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ となり、 $A=3$ 、 $B=6$ 、 $C=18$ となります。

続いて、 $\frac{5}{9}$ の分母と分子に4をかけて分母36に通分し、 $\frac{20}{36}$ とします。

36の約数は1、2、3、4、6、9、12、18、36があり、4個で和を20にする組み合わせ $1+3+4+12$ を使います。

$\frac{20}{36} = \frac{12}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36}$ より、 $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$ となり、 $D=3$ 、 $E=9$ 、 $F=12$ となります。

[問題1]	$\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$					
[問題2]	A	B	C	D	E	F
	3	6	18	3	9	12